* R C - 0 7 6 7 / 1 0 0 *

RC-0767

Second Year B. Sc. Examination

April / May – 2010

Mathematics : Paper - V

(Linear Algebra)

(Old Course)

Time : Hours] [Total Marks :

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :

☛ **S.Y. B.Sc.**

Name of the Subject :

☛ **MATHEMATICS - 5 (OLD)**

☛ Subject Code No. : **0 7 6 7** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **NIL**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) પ્રથમ પ્રશ્ન ફરજિયાત છે.
(૩) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.
(૪) સામાન્ય સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : ૧૦

(૧) શું ગણ $\{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in V_n | x_1 = 0\}$ એ V_n નો ઉપાવકાશ છે ? તમારો જવાબ સાર્થક કરો.

(૨) સાબિત કરો કે સદિશાવકાશમાં શૂન્ય સદિશ ધરાવતો કોઈ પણ ગણ સુરેખ અવલંબી છે.

(૩) શું ગણ $\{(1,1,1), (1,-1,1), (0,1,1)\}$ એ V_3 નો આધાર છે ? કેવી રીતે ?

(૪) સુરેખ પરિવર્તન $T : V_2 \to V_3$; $T(x, y) = (x, x+y, y)$ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત હોય તો તેને માટે $N(T)$ શોધો.

(૫) અંતર્ગુણાનાવકાશ V માં સાબિત કરો કે :
$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|, \ \forall u \in V;$ અદિશ α છે.

૨ (અ) સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાની ક્રમિક n-ટુપલોનો ગણ તેમજ સરવાળા અને અદિશ ગુણાકારને સાપેક્ષ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે. ૫

(બ) ધારો કે R^+ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ છે. આ ગણ ઉપર સદિશ સરવાળો અને અદિશ ગુણાકાર નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. ૪

$u+v=u\cdot v;$ પ્રત્યેક $u,v\in R^+$

$\alpha u+u^{\alpha};$ પ્રત્યેક $u\in R^+$ અને વાસ્તવિક અદિશ α, સાબિત કરો કે

R^+ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે.

(ક) સદિશાવકાશ V માં સાબિત કરો કે : ૩

$$\left[v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\right]=\left[\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n v_n\right]$$

જ્યાં $v_i's\in V, \alpha_i's$ બધા અદિશો છે. $i=1,2,\ldots\ldots,n$

અથવા

૨ (અ) ધારો કે સદિશાવકાશ V માં, $\left[v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\right]=V$ તો સાબિત કરો કે ગણ $\left\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\right\}$ સુરેખ સ્વાયત્ત છે. તો અને તો જ $u\in V$ ને ફક્ત એક જ અભિવ્યક્તિ $u=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2 v_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_n\cdot v_n$ વડે દર્શાવી શકાય. ૫

(બ) જો U અને W એ સદિશાવકાશ V ના બે ઉપાવકાશો હોય તો સાબિત કરો કે $U+W=U$ તો અને તો જ $W\subset U$. ૪

(ક) જો u, v અને w એ ત્રણ સદિશાવકાશ V ના સુરેખ સ્વાયત્ત સદિશો હોય તો સાબિત કરો કે $u+v, v+w$ અને $w+u$ પણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે. ૩

૩ (અ) ધારો કે U અને W એ સદિશાવકાશ V ના ઉપાવકાશો છે. સાબિત કરો કે $Z=U\oplus W$ તો અને તો જ $p\in Z$ ને અનન્ય રીતે $P=u+w$, $u\in U,\ w\in W$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. ૫

(બ) આધાર વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે જો સદિશ અવકાશ V ના આધારમાં $n-$ઘટકો હોય તો V ના કોઈ પણ બીજા આધારમાં પણ $n-$ઘટકો જ હોય છે. ૪

(ક) સદિશાવકાશ V_2 માં સાબિત કરો કે : ૩

સદિશો (a,b) અને (c,d) સુરેખ અવલંબી હોય તો અને તો જ

$a\cdot d=b\cdot c$

અથવા

૩ (અ) સદિશાવકાશ V માં સાબિત કરો કે : ૬

જો $[v_1, v_2, ..., v_n] = V$ અને જો $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ સુરેખ સ્વાયત્ત હોય તો $m \le n$.

(બ) નીચે આપેલ સુરેખ માપ માટે સામાન્ય નિયમ મેળવો : ૬

(૧) $T : V_2 \to V_4 \,;\, T(1,1) = (1,1,1,1)$

અને $T(1,-1) = (-1,-1,0,0)$

(૨) $S : V_2 \to V_2 \,;\, S(2,1) = (2,1)$

અને $S(1,2) = (4,2)$

૪ (અ) ધારો કે $T : U \to V$ સુરેખ પરિવર્તન હોય તો સાબિત કરો કે : ૬

(૧) T નો વિસ્તાર $R(T)$, સદિશાવકાશ V નો ઉપાવકાશ છે.

(૨) જો $[u_1, u_2, ..., u_n] = V$ તો

$$[T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)] = R(T)$$

(બ) સુરેખ માપ ૬

$T : V_3 \to V_2 \,;\, T(e_1) = (1,0,0), T(e_2) = (0,1,1)$

$T(e_3) = (1,2,1)$ માટે વિસ્તાર, કોટિ, શૂન્યાવકાશ તથા શૂન્યાંક મેળવો.

અથવા

૪ (અ) સાબિત કરો કે : પ્રત્યેક $p-$પરિમાણીય વાસ્તવિક (કે સંકર) સદિશાવકાશ V_p ને સમરૂપ છે. ૬

(બ) સાબિત કરો કે સુરેખ પરિવર્તન $T : V_3 \to V_3;\ T(e_1) = e_1 + e_2, T(e_2) = e_2 + e_3,$ ૬

$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$ નિયમિત (Non-singular) છે અને પ્રતિપ પરિવર્તન શોધો.

૫ (અ) એક-એક અને વ્યાપ્ત સુરેખ માપ વ્યાખ્યાયિત કરો. જો $T : U \to V$ એક-એક અને વ્યાપ્ત સુરેખ પરિવર્તન હોય તો સાબિત કરો કે $T^{-1} : V \to U$ એ નિયમિત (Non-singular) સુરેખ પરિવર્તન છે. ૬

(બ) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ એ ક્રમિક આધારો $B_1=\{(1,0),(1,1)\}$ અને ૬

$B_2=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ સાથે સંકળાયેલ છે. તો તેને સંગત સુરેખ પરિવર્તન શોધો.

અથવા

૫ (અ) આપેલ સુરેખ પરિવર્તન T અને આધારો B_1, B_2 નો ઉપયોગ કરી ૬

શ્રેણિક $(T:B_1,B_2)$ મેળવો :

$T:V_3\to V_2; T(x,y,z)=(2x+y,2y-x)$

$B_1=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

$B_2=\{(1,1),(1,-1)\}$

(બ) શ્રેણિક $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ માટે કોટિ-શૂન્યાંક પ્રમેય ચકાસો. ૬

૬ (અ) લંબગણ વ્યાખ્યાયિત કરો. ૬
સાબિત કરો કે સાન્ત પરિમાણીય અંતઃગુણાનાવકાશને એક લંબક આધાર હોય છે.

(બ) ગ્રામ-સ્મિડટ પદ્ધતિથી સુરેખ સ્વાયત્ત ગણ $\{(1,2,0),(3,0,-1),(1,1,1)\}$ ને ૬
લંબાત્મક બનાવો.

અથવા

૬ (અ) લંબ આધાર વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે અંતર્ગુણાનાવકાશમાં કોઈ પણ શૂન્યેતર સદિશોનો લંબસદિશ ગણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે. ૬

(બ) ધારો કે V એ અંતઃગુણાનાવકાશ છે. સાબિત કરો કે પ્રત્યેક $u,v\in V$ ૬
માટે $|u\cdot v|\le\|u\|\cdot\|v\|$.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the instruction no. 1 of page no. 1.
(2) First question is compulsory.
(3) Figures to the right indicate marks of the question.
(4) Follow usual notations.

1 Answer the following questions : **10**

(1) Is a set $\{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in V_n | x_1 = 0\}$ subspace of V_n ? Justify your answer.

(2) Prove that any set of a vector space containing the zero vectors is L.D.

(3) Is the set $\{(1,1,1),(1,-1,1),(0,1,1)\}$ a basis of V_3 ? How ?

(4) Find $N(T)$ for the linear map $T: V_2 \to V_3$; define by $T(x, y) = (x, x+y, y)$.

(5) In an inner product space V, prove that $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$, $\forall\, u \in V$; a scalar α.

2 (a) Prove that : The set of all ordered n-tuples of real numbers with respect to addition and scalar multiplication in it is a real vector space. **5**

(b) Let R^+ be the set of all positive real numbers. Define the operations addition and scalar multiplication as follows **4**

$u + v = u \cdot v$; for all $u, v \in R^+$

$\alpha u + u^{\alpha}$; for all $u \in R^+$ and a real scalar α. Then prove that R^+ is a real vector space.

(c) In a vector space V; prove that **3**

$\left[v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\right] = \left[\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n v_n\right]$

where v_i's $\in V, \alpha_i$'s are scalars for $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

OR

2 (a) In a vector space V, $\left[v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\right] = V$ then prove that $\left\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\right\}$ is L.I. iff If $u \in V$ then $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n \cdot v_n$ is unique. **5**

(b) If U and W are two subspaces of a vector space V then prove that $U + W = U$ iff $W \subset U$. **4**

(c) If u, v and w are three L.I. vectors of a vector space V then prove that $u + v, v + w$ and $W + U$ are also L.I. vectors. **3**

3 (a) Let U and W be two subspaces of a vector space V. Prove that $Z = U \oplus W$ iff $p \in Z$ can be expressed uniquely in the form $P = u + w,\ u \in U,\ w \in W$. **5**

(b) Define : Basis. If a vector space V has a basis of n-elements then prove that every other basis for V has also n-elements. **4**

(c) In a vector space V_2, prove that the vectors (a, b) and (c, d) are L.D. iff $ad = bc$. **3**

OR

3 (a) In a vector space V, if $\left[v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\right] = V$ and if $\left\{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m\right\}$ is L.I. then prove that $m \leq n$. **6**

(b) Obtain the general rule for the following linear maps : **6**

(1) $T : V_2 \to V_4$; $T(1, 1) = (1, 1, 1, 1)$

and $T(1, -1) = (-1, -1, 0, 0)$

(2) $S : V_2 \to V_2$; $S(2, 1) = (2, 1)$

and $S(1, 2) = (4, 2)$

4 (a) Let $T: U + V$ be a linear map then prove that **6**

(1) $R(T)$, the range of T, is a subspace of V.

(2) If $[u_1, u_2, ..., u_n] = V$ then

$$[T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)] = R(T)$$

(b) Determine the range, rank, kernel and nullity for the linear map $T: V_3 \to V_2$ defined by **6**

$T(e_1) = (1, 0, 0), T(e_2) = (0, 1, 1), \; T(e_3) = (1, 2, 1)$.

OR

4 (a) Prove that : Every real (or complex) vector space of dimension p is Isomorphic to V_P. **6**

(b) Prove that : The linear transformation $T: V_3 \to V_3$ defined by $T(e_1) = e_1 + e_2$, $T(e_2) = e_2 + e_3$ and $T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$ is non-singular and find its inverse. **6**

5 (a) Define : One-one and onto linear map. If $T: U \to V$ is one-one and onto linear map. Then prove that $T^{-1}: V \to U$ is non-singular linear map. **6**

(b) Find the linear map associated with a matrix **6**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ relative to the ordered basis

$$B_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}; \; B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

OR

5 (a) Determine the Matrix $(T : B_1, B_2)$ for the given linear map **6**

$T : V_3 \to V_2$ defined by $T(x, y, z) = (2x + y, 2y - x)$

relative to ordered basis :

$B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ and

$B_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$

(b) Verify Rank - Nullity theorem for the matrix : **6**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6 (a) Define : Orthogonal set. prove that every finite dimensional inner product space has an orthogonal basis. **6**

(b) Orthonormalize the L.I. set $\{(1,2,0),(3,0,-1),(1,1,1)\}$ by Gram Schmidt process. **6**

OR

6 (a) Define : Orthogonal basis. Prove that any orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space is L.I. **6**

(b) In an inner product space *V*, prove that for any vectors $u, v \in V$, $|u \cdot v| \le \|u\| \cdot \|v\|$. **6**